

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

Korte mededeling no T.N. 12

Een toepassing van de integraalvergelijking van Abel

door

D.J. Hofsommer

Voordracht in de serie
"Actualiteiten"
 door

D.J. Hofsommer

28 november 1959

Een toepassing van de integraalvergelijking van Abel

1. Inleiding.

Om de potentiaalverdeling van een electrisch veld te bepalen wordt vaak gebruik gemaakt van sondemetingen. In die gevallen waar dergelijke metingen niet kunnen worden uitgevoerd, zal men naar andere methoden moeten omzien. Men kan bijv. electrisch geladen deeltjes in het veld schieten en trachten uit de afbuiging en de looptijd het veld te berekenen. In deze voordracht zal deze methode worden uitgewerkt voor een rotatiesymmetrisch electrisch veld.

2. De vergelijkingen.

De bewegingsvergelijking van een electrisch geladen deeltje met specifieke lading $\varepsilon = e/m$ in een electrisch veld Ψ is

$$\ddot{\vec{r}} = - \varepsilon \nabla \Psi . \quad 1)$$

Wij nemen aan, dat het veld rotatiesymmetrisch is om de oorsprong en dat $\Psi = 0$ voor $r=R$. Deze cirkel noemen we de rand van het veld. Op een punt van de rand worden deeltjes met specifieke lading ε ingeschoten met een snelheid $\vec{v}_R$. De tangentiële component van de inschietsnelheid noemen we $R\dot{\phi}_R$ en de radiale component $\dot{r}_R$. Uit 1) volgen de impuls- en de energiewet

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{R} \times \vec{v}_R \quad 2)$$

$$\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon \Psi = \frac{1}{2}v_R^2 . \quad 3)$$

We beperken ons nu verder tot bewegingen in een vlak loodrecht op de symmetrie as van het veld. We voeren nu poolcoördinaten (r, ϕ) in dit vlak in. De vergelijkingen 2) en 3) worden dan

$$r^2 \dot{\phi} = R^2 \dot{\phi}_R \quad 4)$$

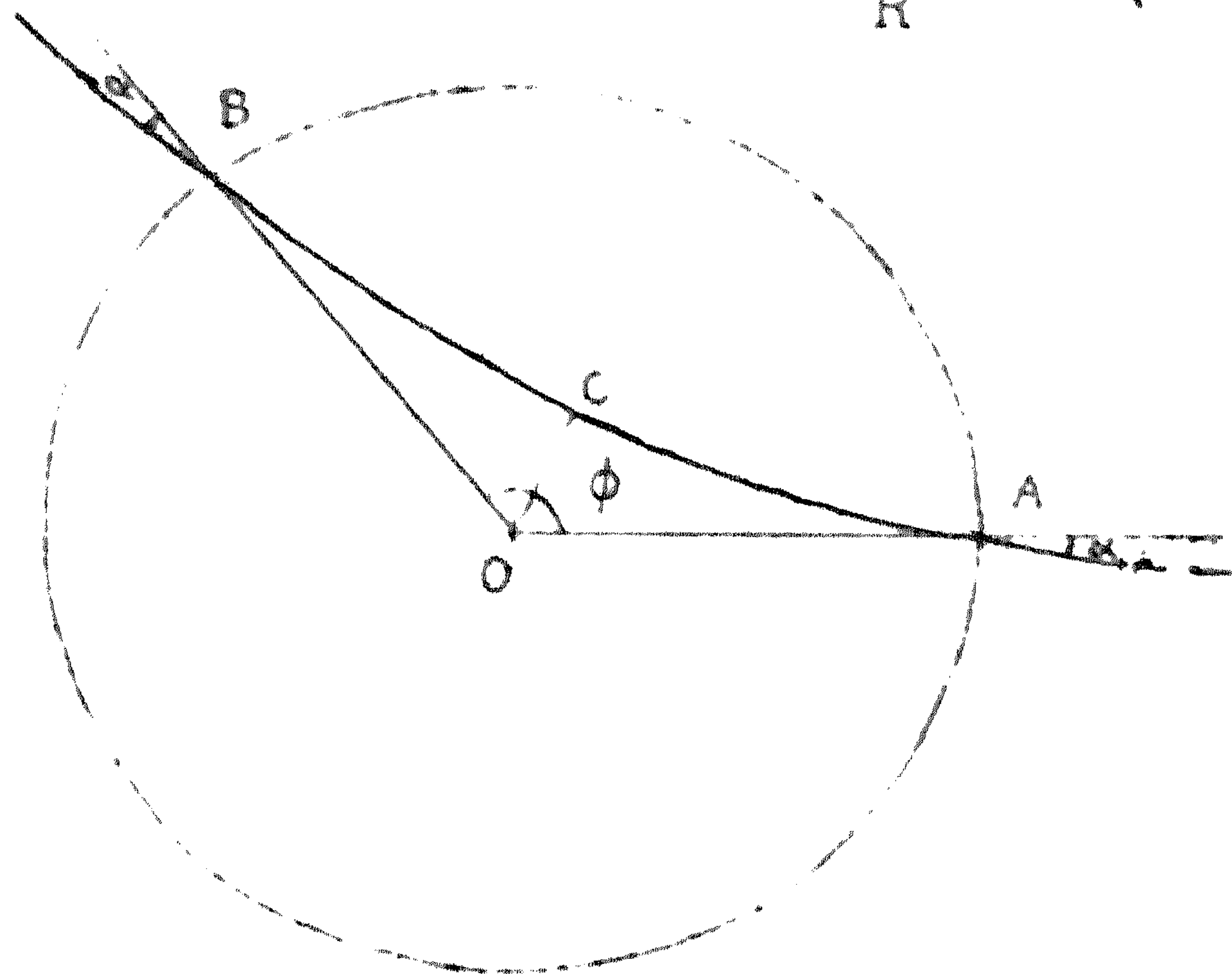
$$\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon \Psi = \frac{1}{2}v_R^2 \quad 5)$$

Deze laatste vergelijking schrijven we in de vorm

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + 2\epsilon \Psi(r) = \dot{r}_R^2 + R^2 \dot{\phi}_R^2 \quad (6)$$

Eliminatie van $\dot{\phi}$ uit 4) en 7) levert

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_R^2 + R^2(1 - R^2/r^2)\dot{\phi}_R^2 - 2\epsilon \Psi \quad (7)$$



Veronderstel dat het deeltje bij A in het veld geschoten wordt en bij B het veld weer verlaat. Verder zij C het punt waar het deeltje de kortste afstand tot de symmetrie as van het veld heeft. Dan is de beweging van het deeltje symmetrisch t.o.v. de lijn OC. Voor de afbuighoek

$\emptyset$ geldt dus $\emptyset = 2 \angle COB$. In het punt C staat de baan loodrecht op OC. Het punt C wordt dus gekenmerkt door de voorwaarde $\dot{r} = 0$.

Wegens

$$\frac{d\phi}{dr} = \dot{\phi} / \dot{r} \quad (8)$$

wordt

$$\frac{1}{2} \emptyset = \int_{r_m}^R \frac{\dot{\phi} dr}{\dot{r}} \quad (9)$$

waarin r_m de afstand OC is en we gebruik hebben gemaakt van bovenvermelde symmetrie eigenschappen.

Substitutie van 7) in 10) geeft dan

$$\emptyset = 2R^2 \dot{\phi}_R \int_{r_m}^R \frac{dr}{r^2 \sqrt{\dot{r}_R^2 + R^2 \dot{\phi}_R^2 - R^4 r^{-2} \dot{\phi}_R^2 - 2\epsilon \Psi}} \quad (10)$$

of in dimensieloze grootheden

$$\emptyset = 2 \int_{\rho_m}^1 \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\cot^2 \alpha + 1 - \rho^{-2} - 2p\psi}} \quad (11)$$

waarin $\rho = r/R$; $\dot{\rho} = \dot{r}/R$; $\psi = \Psi/\Psi_0$; $p = \epsilon \Psi_0 / R^2 \dot{\phi}_R^2$; $\dot{r}_R = v_R \cos \alpha$; $R \dot{\phi}_R = v_R \sin \alpha$. Hierbij is Ψ_0 de waarde van het veld op de as van symmetrie.

Stellen we nu nog $\cot^2 \alpha = x$ en $2p\psi + \rho^{-2} - 1 = y$ dan gaat 11) wegens $y(1) = 0$ en $y(\rho_m) = x$ over in

$$\phi(x) = 2 \int_0^x \frac{\frac{d}{dy} \rho^{-1} dy}{\sqrt{x-y}} . \quad (12)$$

Indien $\phi(x)$ een bekende functie is, staat hier de bekende integraalvergelijking van Abel. We moeten dus de totale afbuighoek meten als functie van de inschiethoek α . Bij het dimensieloos maken is $R\dot{\psi}_R$ constant verondersteld, d.w.z. bij een serie metingen moet de tangentiële component van de snelheid gelijk zijn, of anders gezegd de deeltjes moeten telkens met hetzelfde impuls-moment t.o.v. de symmetrie as worden ingeschoten.

De oplossing van 12) is

$$\frac{d}{dy} \rho^{-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{\phi(x) dx}{\sqrt{y-x}}$$

of, na integratie, wegens $\rho(0)=1$

$$\frac{1}{\rho(y)} = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^y \frac{\phi(x) dx}{\sqrt{y-x}} \quad (13)$$

of

$$\boxed{\frac{1}{\rho(y)} = 1 + \frac{1}{\pi} \phi(y) \sqrt{y} - \frac{1}{2\pi} \int_0^y \frac{\phi(y)-\phi(x)}{\sqrt{y-x}} dx} \quad (14)$$

Uit 13) of 14) kunnen we $\rho(y)$ bepalen. Indien $\phi(x)$ numeriek is gegeven (bijv. door metingen) is 14) te verkiezen boven 13) omdat de integrand in 13) singulier is voor $x=y$. Het elektrische veld vinden we daarna uit

$$\boxed{\psi(\rho) = \frac{y(\rho)+1-\rho^{-2}}{2\rho}} \quad (15)$$

. Electrisch en magnetisch veld.

Indien op het elektrische veld een rotatiesymmetrisch magneetveld is gesuperponeerd met dezelfde as van symmetrie, vinden we op overeenkomstige wijze

$$\frac{1}{\rho} + \rho \left[\rho^{-1} \int_{\rho}^1 \eta \beta(\eta) d\eta - \int_{\rho}^1 \beta(\eta) d\eta \right] = \frac{1}{\pi} \phi(y) \sqrt{y} - \frac{1}{2\pi} \int_0^y \frac{\phi(y)-\phi(x)}{\sqrt{y-x}} dx \quad (14a)$$

$$\psi(\rho) = \frac{y+1-\rho^{-2} \left[1 + \rho \int_{\rho}^1 \eta \beta(\eta) d\eta \right]^2}{2\rho} \quad (15a)$$

waarin het magnetische veld B dimensieloos is gemaakt met behulp van $B = \psi_0 \beta / R^2 \dot{\psi}_R$.

Indien het magnetische veld bekend is kan het elektrische veld weer met bovenstaande formules worden berekend.